Gleichungen höheren Grades:

1.)Lineare Gleichungen

2.)Quadratische Gleichungen: Lösungsformel

3.)Gleichungen höheren Grades:

Eine allgemeine Gleichung dritten.Grades

$$x^3 + rx^2 + sx + t = 0$$

kann durch Einsetzen von $x = y - \frac{r}{3}$ auf die Form

$$y^3 - 3p\,y - 2q = 0$$

gebracht werden. Eine Lösung lautet:

$$y_1 = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$$

Diese Lösungsformel des italienischen Mathematikers und Arztes GERONIMO CARDANO wurde von Tartaglia bzw. del Ferro (16 Jhdt.)gefunden und ist kompliziert und kaum praktikabel. Eine ähnliche Formel gibt es für Gleichungen 4.Grades. Abel (1825) bewies, dass es für n>4 keine Lösungsformel geben kann.

Ein **Polynom n-ten Grades** lautet $a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1 + \cdots}\ a_1 + a_0$ – wobei $a_n \neq 0$, $a_i \in R$, $n \in N$.

a_i werden Koeffizienten genannt, a_0 absolutes Glied.

Ein Polynom wird **normiertes Polynom** genannt, wenn $a_n = 1$.

Der Fundamentalsatz der Algebra besagt folgendes (Gauß 1799):

Jedes nichtkonstante Polynom p(x) besitzt über der Menge C mindestens eine Nullstelle, d.h. die Gleichung p(x) = 0 ist über der Grundmenge C lösbar. Werden Nullstellen in ihrer Vielfachheit gezählt → Jede algebraische Gleichung n-ten Grades hat in C n Lösungen. (In R kann sie auch weniger Lösungen haben.)

Ein weiterer **Satz**, der sich jedoch nur auf **symmetrische** Gleichungen bezieht:

1. Wenn der Grad einer symmetrischen Gleichung ungerade ist, dann ist -1 oder +1 eine Lösung der Gleichung.
2. Ist a eine Lösung, so ist auch 1/a eine Lösung.

Biquadratische Gleichungen können durch Substitution gelöst werden

Der Wurzelsatz von Vieta besagt:

Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n \in C$ Lösungen der <u>normierten</u> algebraischen Gleichung

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ so gilt:

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$

d.h.: p(x) lässt sich als Produkt von Linearfaktoren schreiben.

Nun ergibt sich der Satz von Viëta durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich:

$$a_{n-j} = (-1)^j \sigma_j, \quad j = 0, \ldots, n$$

wobei

$$\sigma_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} X_{i_1} \cdots X_{i_k}$$

z.B.

$$P(x) = x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} -a_3 &= \sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ a_2 &= \sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\ -a_1 &= \sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 \\ a_0 &= \sigma_4 = x_1x_2x_3x_4 \end{aligned}$$

Besitzt eine normierte algebraische Gleichung lauter ganzzahlige Koeffizienten und gibt es ganzzahlige Lösungen, so sind diese Teiler des absoluten Gliedes.

Ein weiterer **Satz**, der beim Lösen helfen kann, lautet:

Hat ein Polynom n-ten Grades (mit reellen Koeffizienten) eine komplexe Nullstelle, so ist auch die konjungiert komplexe Zahl Nullstelle dieses Polynoms.

Daher hat ein Polynom ungeraden Grades (mit reellen Koeffizienten nur ungerade reelle Lösungen.

Numerische Verfahren:

Näherungsverfahren, Bestimmung einer Nullstelle, dann Reduktion der Ordnung der Gleichung

Intervallschachtelung: Der Zwischenwertsatz sagt aus, dass eine reelle Funktion f, die auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig ist, jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ annimmt. Haben insbesondere $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen, so garantiert der Zwischenwertsatz die Existenz von mindestens einer Nullstelle von f im abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Dieser Sonderfall ist als*Nullstellensatz von Bolzano* bekannt und nach Bernard Bolzano benannt.

Newton´sches Verfahren:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Übungen:1.)Biquadratische Gleichungen

a) $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$

b) $x^4 + 1{,}75x^2 = 9$

c) $4x^4 - 5x^2 - 9 = 0$

e) $\frac{14(2x^2 - 7)}{x} = \frac{225x}{x^2 - 1}$

f) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

g) $x^4 = 3x^2$

h) $x^4 = \frac{1}{4}\left(x^2 - 25\right)$

2.)

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung $3x^3 + 7x^2 - 7x - 3 = 0$.

3.)Wie lautet die Linearfaktorenzerlegung von

$x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$?

4.) Nullstellen der Funktione a.)$0 = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$

b.) $f(x) = y = 15x^3 - 49x^2 + 49x - 15$

c.) f. $y = x^4 - 4x^2 - 5$

5.)Löse folgende Gleichungen

a) $x^3 + 5x^2 - 26x - 120 = 0, \quad x_1 = 5$

b) $2x^3 + 4x^2 - 58x + 84 = 0, \quad x_1 = 2$

c) $x^3 - 7x - 6 = 0$

d) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

6.)1.)

a) $x^3 = 64$

b) $x^3 = -125$

c) $8x^3 - 27 = 0$

d) $5x^3 + 2{,}56 = 0$

e) $x^4 = 625$

f) $x^4 = -16$

g) $3x^4 + 243 = 0$

h) $80x^4 - 5 = 0$

2.)

a) $x^3 - 10x^2 + 16x = 0$

b) $x^3 + 9x^2 + 14x = 0$

c) $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$

d) $x^3 + 4x^2 + 6x = 0$

e) $x^3 - 3x^2 = 0$

f) $4x^3 + x^2 = 0$

g) $2x^3 + 9x^2 - 5x = 0$

h) $5x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

3.)

a) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$

b) $x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0$

c) $x^3 - x^2 - 16x - 20 = 0$

d) $x^3 + 2x^2 + 9x + 18 = 0$

e) $x^3 - 7x + 6 = 0$

f) $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

g) $4x^3 - 15x^2 + 12x + 4 = 0$

h) $5x^3 - 12x^2 + 5x - 2 = 0$

4.)

a) $x^3 + 12 = 3x^2 + 4x$

b) $x^3 + 2x = 2x^2 + 15$

c) $x^3 + x^2 = 10x - 8$

d) $3(x^3 + 1) = 7x(x + 1)$

e) $x^2(x - 2) = (x - 3)(x + 2) + 1$

f) $x(x - 4)^2 + x = 10$

g) $x(x - 1)(x - 5) + 12 = 0$

h) $(x + 2)(x - 3)(x - 5) = 24$

5.)

a) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$

b) $x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 36x - 36 = 0$

c) $x^4 + 3x^3 - x^2 - 13x - 10 = 0$

d) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$

e) $x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 3x - 4 = 0$

f) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9x + 18 = 0$

g) $x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$

h) $x^4 + 5x^3 - 20x - 16 = 0$

6.)

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$

c) $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$

d) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

e) $x^4 + 7x^2 + 12 = 0$

f) $x^4 + 2x^2 - 24 = 0$

g) (*) $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$

h) (*) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

7. Wenn man Kugeln zu einer quadratischen Pyramide aus n Schichten aufstapelt, braucht man $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ Kugeln. Wie hoch ist eine Pyramide, die aus 30 Kugeln gebaut wurde?

8. Ein würfelförmiges Gefäß ist bis 1 dm unter den Rand mit Wasser gefüllt. Es enthält 100 l Wasser. Berechnen Sie die Seitenlänge.

9. Die Länge eines Schwimmbeckens ist um 3 m größer als die Breite, und die Breite ist um 3 m größer als die Tiefe. Das Volumen beträgt 80 m³. Berechnen Sie die Maße des Schwimmbeckens.

10. Die Länge eines Quaders ist ein Zwölftel der Höhe, die Breite ist zwei Drittel der Länge. Vergrößert man die Höhe um eine Elle, so beträgt das Volumen $1\frac{1}{6}$ Kubikellen. Berechnen Sie die Seitenlängen. (Tipp: Wählen Sie die Höhe als Unbekannte.) *(Nach einer babylonischen Aufgabe, ca. 1500 v. Chr.)*

11. Aus einem rechteckigen Blech mit den Seitenlängen a = 10 dm und b = 8 dm soll eine quaderförmige Dose hergestellt werden, indem man an den Ecken Quadrate ausschneidet und die übriggebliebenen Rechtecke hochbiegt. Das Volumen der Dose soll 48 dm³ betragen. Wie groß muss die Seitenlänge der Quadrate sein? (2 Lösungen)

12. Ein quadratisches Prisma hat 900 dm³ Volumen. Die Summe von Basiskante und Höhe beträgt 19 dm. Berechnen Sie die Maße des Prismas. (2 Lösungen)

7.) Bestimme eine Nullstelle folgender Gleichung mit Hilfe einer Intervallschachtelung und mit Hilfe des Newton´schen Verfahrens:

a.) $f(x) = x^3 - 2x - 5$ (Nullstelle zwischen 2 und 3)

b.) $f(x) = x^3 - 3x + 6$

c.) $f(x) = x^4 - 3x + 1 = 0$

d.) $f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$